Tópicos Avanzados de Lógica – II-2006 – Parcial 2

Teoría de Modelos de Clases Elementales Abstractas

Para entregar el miércoles 1 de noviembre, a las 2, en clase.

Hay **tres** maneras de hacer este parcial: (1) hacer todos los problemas de cinturón blanco y uno de cinturones kyu - (2) hacer solo un problema de cinturón blanco y tres cinturones kyu o (3) hacer solo un problema de cinturón kyu y el cinturón negro. Cualquiera está bien.

1. Cinturón blanco

1. Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ una clase elemental abstracta, y suponga que $\lambda \geq LS(\mathcal{K})$. Demuestre que si $\mathcal{K}$ es λ-categórica y existen $M \prec_{\mathcal{K}} N$ ambos de tamaño λ tales que $M \neq N$, entonces $\mathcal{K}$ tiene modelos de tamaño λ^+.

2. Sea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ una cea, y $\lambda \geq LS(\mathcal{K})$. Suponga que $\mathcal{K}$ es categórica en λ y en λ^+. Demuestre que si $\mathcal{K}$ tiene modelos de tamaño λ^{++} entonces para toda cadena $\preceq_{\mathcal{K}}$-creciente y continua $(M_i)_{i<\lambda^+}$ de modelos en $\mathcal{K}_\lambda$ existe una cadena $\preceq_{\mathcal{K}}$-creciente y continua $(M_i^1)_{i<\lambda^+} \subset \mathcal{K}_{\lambda^+}$ tal que $M_i \prec_{\mathcal{K}} M_i^1$, y $M_i \neq M_i^1$ para todo $i < \lambda^+$.

3. Sea $\mathcal{K}^{LF}$ la clase de los grupos localmente finitos (es decir, grupos tales que todo subconjunto finito genera un subgrupo finito). Demuestre
   - $\mathcal{K}^{LF}$ no es axiomatizable en primer orden.
   - $\mathcal{K}^{LF}$ es una cea con $LS(\mathcal{K}^{LF}) = \aleph_0$.

4. Sea $ACF_{p,\infty}$ la clase de los cuerpos de característica p y grado de trascendencia infinito. Demuestre
   - $ACF_{p,\infty}$ no es axiomatizable en primer orden.
   - $ACF_{p,\infty}$ es una cea con $LS(\mathcal{K}^{LF}) = \aleph_0$, totalmente categórica.

5. Sea $\kappa \geq LS(\mathcal{K})$, para $\mathcal{K}$ una cea con AP. Demuestre que $|\mathrm{ga} - \mathrm{S}(M)| \leq 2^\kappa$ para todo $M \in \mathcal{K}_\kappa$.

2. Kyu (cinturones amarillo, naranja, verde, azul y marrón)

1. Demuestre cuidadosamente que dada una cea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ con AP, galois-estable en algún $\lambda \geq LS(\mathcal{K})$, para todo modelo M en $\mathcal{K}_{\geq\lambda}$ y para todo tipo de Galois $p \in \mathrm{ga}-\mathrm{S}(M)$ existe un modelo M_0 de tamaño $\leq \lambda$ tal que p no rompe sobre M_0.

2. Defina una sentencia $\psi_\alpha \in L_{\omega_1,\omega}$ para cada ordinal $\alpha < \omega_1$ en el lenguaje $\{c_\beta | \beta < \alpha\} \cup \{\in\}$ tal que ψ_α tenga un modelo de cardinal $\beth_\alpha$ pero no tiene modelos más grandes.

3. Demuestre que $\langle \mathcal{K}^{ab}, \prec_{puro} \rangle$, la clase de grupos abelianos con extensión “pura” ($G \prec_{puro} H$ ssi dado $a \in G$ y dado $n \in \omega$, siempre que exista $b \in H$ tal que $nb = a$ existe también $b' \in G$ tal que $nb' = a$) satisface el axioma “de Tarski-Vaught”. Demuestre que satisface JEP.

4. Encuentre un ejemplo en una cea $\langle \mathcal{K}, \prec_{\mathcal{K}} \rangle$ con $\mathcal{K} = Mod(\psi)$ para alguna $\psi \in L_{\omega_1,\omega}$ donde tipos de Galois **no** sean equivalentes a $L_{\omega_1,\omega}$-tipos sintácticos. Ayuda: considere elementos no estándar en extensiones de los reales.

5. Demuestre que la clase $\mathcal{K}_{ind,2}$ de grafos bipartitos “aleatorios” vista en clase siempre es $\aleph_0$-categórica (Ayuda: arme un sistema de back and forth, análogo al de la prueba de $\aleph_0$-categoricidad del grafo aleatorio en primer orden)[1].

---

[1]Recuerde que M está en $\mathcal{K}_{ind,2}$ si

- $M = (P^M, Q^M, E^M)$ con P y Q disyuntos y $E \subset P \times Q$ (no escribo los superíndices de las interpretaciones).
- $|Q| = |M|$.
- P es contable.
- La familia A_b para $b \in Q$ es estocásticamente independiente ($A_b = \{a \in P | aEb\}$).
- Dados A, B subconjuntos finitos disyuntos de P, el conjunto $\Gamma_{A,B} = \{c \in Q | \forall a \in A(aEc) \wedge \forall b \in B \neg(bEc)\}$ (los “testigos de la propiedad de independencia”) tiene tamaño igual al de M.

Recuerde que $M \prec_{ind,2} N$ exige que $P^N = P^M$, que $Q^N \supset Q^M$, $E^N \supset E^M$ y que $|\Gamma^N_{A,B} \setminus \Gamma^M_{A,B}| \geq \aleph_0$.

3. Dan (cinturón negro)

Aquí hay más matemática. Si entrega este problema, no debe entregar ningún problema de cinturón blanco, y uno solo de los de cinturones kyu.

Demuestre que, aunque $\langle \mathcal{K}^{cyc}, \prec_{sum} \rangle$ no es una cea[2] (pues falla la parte del "supremo" del axioma de uniones), como clase de modelos tiene las siguientes propiedades:

1. Tiene AP.
2. Es dócil.
3. No es categórica.
4. Tiene número de LS igual a $\aleph_0$.
5. Es galois-estable en todo cardinal.

Demuestre también que las cosas empeoran si cambiamos $\prec_{sum}$ por $\prec_{puro}$: la clase no queda cerrada bajo uniones. Ayuda: explique los siguientes pasos.

1. Sea $H \prec_{puro} \prod_{k<\omega} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ con $|H| = \aleph_1$. Tome una $\prec$-resolución $(H_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de H tal que todos los H_α son contables[3]. Verifique que H_α tiene sucesión de Ulm de la forma $1, 1, 1, \cdots$ y es 0 de ω en adelante. (Use que H no tiene elementos de altura transfinita.)
2. Por unicidad de los invariantes de Ulm para grupos *contables* reducidos con torsión, todo H_α es isomorfo a $\bigoplus_{k<\omega} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$. Concluya que $H_\alpha \in \mathcal{K}^{cyc}$.
3. H tiene las mismas invariantes de Ulm que $\bigoplus_{k<\omega} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$.
4. H es una suma directa contable. Contradicción, pues $|H| = \aleph_1$.

[2]Recuerde que $\mathcal{K}^{cyc}$ consta de todos los modelos que son (isomorfos a) sumas directas de grupos cíclicos, es decir, los M tal que $M \approx \bigoplus_{p\in\Pi} \bigoplus_{k\in\Sigma_p} (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})^{\lambda_{p,k}}$ y $G \prec_{sum} H$ significa que G es sumando directo de H.

[3]Aquí los H_α son submodelos elementales usuales.